# 8 Optimización

## 8.1 Introducción a la optimización

La optimización, en el contexto del tema que estamos tratando, se refiere a los procedimientos que pueden seguirse para determinar dónde una función $y = g(x)$ toma valores específicos o valores extremos (máximos y mínimos). En una función definida en forma explícita, a menudo podemos obtener su correspondiente función inversa que expresamos de la forma $x = g^{-1}(y)$, en cuyo caso puede determinarse qué valores de $x$ producen una $y$ dada por medio de la evaluación de la función inversa. Por otra parte, muchas funciones, incluyendo algunas de las más simples, no tienen o no puede calcularse su función inversa. En estos casos, querríamos poder estimar los valores de $x$ que producen un valor dado de $y$ por medio de procedimientos iterativos. En la práctica, este procedimiento de iteración se denomina ***búsqueda de los ceros de la función (“zero finding”)***, ya que encontrar $x$ tal que $y = g(x)$ para algún $y$ es equivalente a encontrar $x$ tal que $f(x) = 0$, donde $f(x) = y - g(x)$.

Para conocer dónde una función tiene un valor especifico, es normal que busquemos sus valores extremos, es decir, aquellos valores que son un máximo o un mínimo. Como hemos dicho antes, en muchas ocasiones la búsqueda de esos valores no puede ser hecha más que por medio de procedimientos iterativos. Ya que el máximo de una función es el mínimo del negativo de la función (esto es, $max\, f(x) = min\,\{-f(x)\}$), normalmente lo que se suele hacer es encontrar solo los valores mínimos. Por este motivo es por el que los procedimientos que vamos a estudiar se suelen denominar ***algoritmos de minimización***

## 8.2 Problemas de aplicación de máximos y mínimos

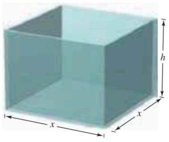
Una de las aplicaciones más comunes del cálculo implica la determinación de los valores máximo y mínimo. Recordar cuántas veces hemos oído hablar de utilidad (beneficio) máxima(o), mínimo coste, tiempo mínimo, voltaje máximo, forma óptima, tamaño mínimo, máxima resistencia y máxima distancia.

**Estrategia para resolver problemas aplicados de mínimos y máximos.**

1. Identificar todas las cantidades *dadas* y las que *se van a determinar*. Si es posible, elaborar un dibujo.
2. Escribir una ecuación primaria para la cantidad que se va a maximizar o minimizar.
3. Reducir la ecuación primaria a una que tenga una *sola variable independiente*. Esto quizá implique el uso de ecuaciones secundarias que relacionan las variables independientes de la ecuación primaria.
4. Determinar el dominio admisible de la ecuación primaria. Esto es, determinar los valores para los cuales el problema planteado tiene sentido.
5. Determinar el valor máximo o mínimo deseado mediante las técnicas de cálculo estudiadas.

*Ejemplo 1.*

**Determinación del volumen máximo**




Un fabricante quiere diseñar una caja abierta que tenga una base cuadrada y un área superficial de 108 $cm^2$, como se muestra en la figura. ¿Qué dimensiones producirán una caja con un volumen máximo?

*Solución*

Debido a que la caja tiene una base cuadrada de lado $x$, su volumen es:

$$V = x^2 h$$

Esta ecuación recibe el nombre de **ecuación primaria** porque proporciona una fórmula para la cantidad que se va a optimizar. El área de la superficie de la caja es:

$$S = \text{área de la base} + \text{área de los cuatro lados}$$

$$S = x^2 + 4xh = 108$$

Como $V$ se va a maximizar, escribir $V$ como una función de una sola variable. Para hacerlo, es posible resolver la ecuación $x^2 + 4xh = 108$ para $h$ en términos de $x$ y obtener:

$$h = \frac{108 - x^2}{4x}$$

Sustituyendo en la ecuación primaria, se obtiene:

$$V = x^2 h = V = x^2 \left( \frac{108 - x^2}{4x} \right) = 27x - \frac{x^3}{4}$$

Antes de determinar qué valor de $x$ producirá un valor máximo de $V$, se necesita determinar el *dominio admisible*. Esto es, ¿qué valores de $x$ tienen sentido en este problema? Se sabe que $V \geq 0$. También que $x$ debe ser no negativa y que el área de la base ($A = x^2$) es a lo sumo 108. De tal modo, el dominio admisible es:

$$0 \leq x \leq \sqrt{108}$$

Para maximizar $V$ debemos determinar los puntos críticos de la función de volumen en el intervalo $(0, \sqrt{108})$:

$$\frac{dV}{dx} = 27 - \frac{3x^2}{4} = 0 \Longrightarrow 3x^2 = 108 \Longrightarrow x = \pm 6$$

De tal modo, los puntos críticos son $x = \pm 6$. No se necesita considerar $x = -6$ porque está fuera del dominio. La evaluación $V$ en el punto crítico $x = 6$ y en los puntos terminales del dominio produce $V(0) = 0, V(6) = 108$ y $V(\sqrt{108}) = 0$. De tal modo, $V$ es máximo cuando $x = 6$ y las dimensiones de la caja son $6\ x\ 6\ x\ 3$ centímetros.

En el Ejemplo 1 se nota que hay un número infinito de cajas abiertas que tienen 108 centímetros cuadrados de área superficial. Para empezar a resolver el problema es necesario preguntar qué forma básica podría producir un volumen máximo. ¿La caja debe ser alta, muy baja o casi cúbica?

Se puede tratar de calcular unos cuantos volúmenes, para ver si se obtiene una mejor idea de lo que deben ser las dimensiones óptimas. Recuerda que no se puede resolver un problema hasta que no haya sido identificado con toda claridad.

*Ejemplo 2.* **Área mínima**

Una página rectangular ha de contener 24 centímetros cuadrados de impresión. Los márgenes de la parte superior y de la parte inferior de la página son de 1,5 centímetros, y los márgenes de la izquierda y la derecha de 1 centímetro. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la página para que se use la menor cantidad de papel?


*Solución*

Sea $A$ el área que se va a minimizar: $A = (x+3)(y+2)$ (*ecuación primaria*)

El área impresa dentro del margen está dada por: $24 = xy$ (*ecuación secundaria*)

Despejando de esta ecuación la $y$ se obtiene: $y = \frac{24}{x}$

Sustituyendo en la ecuación primaria obtenemos:

$$A = (x+3)\left(\frac{24}{x} + 2\right) = 30 + 2x + \frac{72}{x}$$

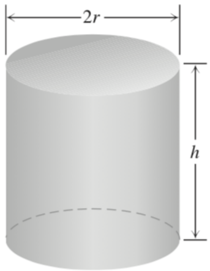
Debido a que $x$ debe ser positiva, sólo interesan los valores de $A$ para $x > 0$. Para encontrar los puntos críticos, derivamos con respecto a $x$.

$$\frac{dA}{dx} = 2 - \frac{72}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 36$$

De modo que los puntos críticos son $x = \pm 6$. Desechamos el valor $x = -6$ por estar fuera del dominio. El criterio de la primera derivada confirma que $A$ es mínima cuando $x = 6$. De tal modo, $y = \frac{24}{6} = 4$ y las dimensiones de la página deben ser $x + 3 = 9$ centímetros por $y + 2 = 6$ centímetros.

*Ejemplo 3.*

Se le ha pedido diseñar una lata con capacidad de un litro que tenga la forma de un cilindro circular recto. ¿Qué dimensiones harán que se utilice la menor cantidad de material?




*Solución*

Si $r$ y $h$ se miden en centímetros, entonces el volumen de la lata es:

$$V = \pi r^2 h \quad cm^3$$

El área superficial de la lata es:

$$A = \text{área total} = \text{área lateral} + \text{área de las tapas} = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

¿Cómo podemos interpretar la frase "menor cantidad de material"? Como una primera aproximación, es posible ignorar el grosor del material y el desperdicio en la fabricación. Después nos preguntamos acerca de las dimensiones $r$ y $h$ que hacen que el área de la superficie total sea tan pequeña como sea posible y que se satisfaga la restricción $\pi r^2 h = 1000$.

Para expresar el área de la superficie como una función de una variable, despejamos una de las variables en $\pi r^2 h = 1000$y sustituimos esa expresión en la fórmula para el área de la superficie. Es más sencillo despejar $h$:

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

Y la sustituimos en la expresión del área total:

$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r \frac{1000}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2000}{r} + 2\pi r^2$$

Nuestro objetivo es determinar un valor de $r > 0$ que minimice el valor de $A$.

Como $A$ es diferenciable para $r > 0$, un intervalo que no tiene extremos sólo puede contar con un valor mínimo donde la primera derivada sea cero.

$$\frac{dA}{dr} = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0 \Longrightarrow 4\pi r^3 = 2000 \Longrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5{,}42\ cm$$

Comprobamos si es un mínimo o máximo con la segunda derivada:

$$\frac{d^2A}{dr^2} = 4\pi + \frac{4000}{r^3}$$

Es positiva en todo el dominio de $A$. Por tanto la gráfica es cóncava hacia arriba en todo su dominio y el valor de $A$ para $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ es un mínimo absoluto.

El valor correspondiente de h es:

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r$$

La lata de un litro que utiliza la menor cantidad de material tiene altura igual a dos veces el radio, en este caso:

$$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5{,}42\ cm \text{ y } h = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 10{,}84\ cm$$